УДК 517.98

Н. І. КРИВОРУЧКО
Хмельницький національний університет

АПРОКСИМАЦІЯ СКІНЧЕННОВИМІРНИМ ЧЕБИШОВСЬКИМ ПІДПРОСТОРОМ

У даній статті розглянуто випадок апроксимації скінченновимірним чебишовським підпростором; висвітлено питання єдиності чебишовського центра для компакту в множині гільбертового простору та чебишовського альтернансу.

Однією з галузей математики, що найбільш інтенсивно розвивається, є теорія наближень. Потреба наближення складних математичних об'єктів більш простими і зручними у користуванні виникає як при розгляді теоретичних проблем математики, так і при вирішенні проблем практичного характеру.

Задачі найкращого одночасного наближення кількох або нескінченної кількості елементів утворюють важливий клас задач теорії наближення. Питання дослідження цих задач у різних аспектах розглядались в багатьох працях (див., напр., [1]–[4]). Особливий інтерес становить задача відшукання чебишовського центра в конкретних лінійний нормованих просторах, зокрема в гільбертовому просторі.

Нехай H – гільбертів простір над полем дійсних чисел, V – множина в H, K – його компакт. Задачею відшукання чебишовського центра компакту K в множині V будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_K^*(V) = \inf_{g\in V}\max_{y\in K}\|g-y\|. \tag{1}$$

Означення 1. Якщо існує елемент $g^*\in V$ такий, що

$$\alpha_K^*(V) = \max_{y\in K}\|g^*-y\|, \tag{2}$$

то його будемо називати чебишовським центром для компакту K в множині V або просто екстремальним елементом для величини (1).

Метою роботи є уточнення критерію екстремального елемента величини (1) для випадку, коли у задачі відшукання величини (1) V є чебишовським підпростором; доведення теореми про єдиність екстремального елемента у розглядуваному випадку; узагальнення на випадок задачі відшукання величини (1) поняття чебишовського альтернансу.

Нехай в задачі відшукання чебишовського центра компакту K в множині V (відшукання величини (1)) V – лінійний підпростір простору H, породжений лінійно незалежними відображеннями $g_i\in H$, $i=\overline{1,n}$.

Надалі будемо припускати, що виконується, так звана, умова (Н): для будь-яких лінійно незалежних елементів $\varphi_j\in H$, $\|\varphi_j\|=1$, $j=\overline{1,n}$, визначник

$$\det\left[\langle\varphi_j,g_i\rangle\right]=\begin{vmatrix}\langle\varphi_1,g_1\rangle\ \dots\ \langle\varphi_1,g_n\rangle\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \langle\varphi_n,g_1\rangle\ \dots\ \langle\varphi_n,g_n\rangle\end{vmatrix}\neq 0.$$

Припускається, що принаймні n зазначених елементів φ_j, $j=\overline{1,n}$ існують.

Умову (Н) будемо називати *узагальненою умовою Хаара*.

При виконанні умови (Н) підпростір V називатимемо *чебишовським підпростором* простору H.

Твердження 1. Якщо виконується умова (Н) і $1\le j\le r\le n+1$, то ненульовий елемент $\varphi=\sum_{j=1}^{r}\rho_j\varphi_j$ гільбертового простору H^*, належить $V^\perp$ лише тоді, коли $k=n+1$, та елементи φ_j, $j=\overline{1,n+1}$, утворюють лінійно незалежну систему, а числа ρ_j, $j=\overline{1,n+1}$, відмінні від нуля.

Означення 2. (див., наприклад, [5,с.21]) Множина нормованого простору називається локально компактною, якщо будь-яка обмежена послідовність елементів цієї множини містить збіжну підпослідовність.

Теорема 1. Якщо V - замкнена локально компактна множина гільбертового простору H, то чебишовський центр компакту K в множині V існує.

Доведення. Нехай $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ - екстремальна послідовність для величини (1), тобто $g_n\in V$, $n=1,2,\dots$ Очевидно, що $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ – обмежена.

Внаслідок локальної компактності та замкненості множини V з $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ можна вибрати збіжну до

$g^* \in V$ підпослідовність $\left\{g_{n_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$: $\lim\limits_{l\to\infty} g_{n_l} = g^*$.

Беручи до уваги неперервність функції $\Phi_K(g) = \max\limits_{y\in K}\|g-y\|$, отримуємо

$$\lim_{l\to\infty}\Phi_K\left(g_{n_l}\right) = \Phi_K\left(g^*\right) = \max_{y\in K}\left\|g^*-y\right\| = \alpha_K^*(V).$$

Це означає, що g^* – чебишовський центр компакту K в опуклій множині V.

Теорему доведено.

Наслідок 1. Якщо V – скінченновимірний підпростір гільбертового простору H, то чебишовський центр компакту K в V існує.

Справедливість наслідку випливає з теореми 1, оскільки скінченновимірний підпростір гільбертового простору є локально компактною та замкненою множиною (див., наприклад, [5, с.21-22]).

Теорема 2. Нехай H – гільбертів простір, V – чебишовський підпростір простору H, породжений лінійно незалежними відображеннями $g_i \in H$, $i=\overline{1,n}$. Тоді для будь-якого $y\in K$ існує єдиний екстремальний елемент для величини (1) (чебишовський центр компакту K в підпросторі V).

Для того щоб у цьому випадку елемент $g^*\in V$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існували такі $y_j\in K$, $j=\overline{1,n+1}$, додатні числа ρ_j, $j=\overline{1,n+1}$, що

$$\left\langle \frac{g^*-y_j}{\left\|g^*-y_j\right\|}, g^*-y_j \right\rangle = \max_{y\in K}\left\|g^*-y\right\|,\ j=\overline{1,n+1}, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1}\rho_j\left\langle g^*-y_j, g\right\rangle = 0 \ \textit{для всіх}\ g\in V, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1}\rho_j = 1. \tag{5}$$

Доведення. Існування чебишовського центра компакту K в підпросторі V випливає з наслідку 1. Переконаємося у єдиності цього елемента.

Припустимо, що g_1^* та g_2^* – чебишовські центри компакту K в підпросторі V. Тоді $\frac{g_1^*+g_2^*}{2}$ також є чебишовським центром компакту K в підпросторі V.

На підставі наслідку 3 (див., [6, с.149]) існують елементи $y_j\in K$, додатні числа ρ_j, $1\le j\le k\le n+1$, $\sum\limits_{j=1}^{k}\rho_j = 1$, такі, що для $g^* = \frac{g_1^*+g_2^*}{2}$

$$\left\langle \frac{g^*-y_j}{\left\|g^*-y_j\right\|}, g^*-y_j \right\rangle = \max_{y\in K}\left\|g^*-y\right\| = \alpha_k^*(V),\ j=\overline{1,k}, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{k}\rho_j\left\langle g^*-y_j, g\right\rangle = 0, \text{ для всіх } g\in V. \tag{7}$$

Згідно (7) $\sum\limits_{j=1}^{k}\rho_i\left\langle g^*-y, g\right\rangle = 0$ для всіх $g\in V$, тобто $\sum\limits_{j=1}^{k}\rho_j\varphi_j \in V^{\perp}$, для всіх $j=\overline{1,k}$, $g\in V$.

Переконаємося, що $\sum\limits_{j=1}^{k}\rho_j\varphi_j \ne 0$. В протилежному випадку $\sum\limits_{j=1}^{k}\rho_j\varphi_j(g) = 0$ для всіх $g\in H$.

Звідси та з (6) одержимо для всіх $g\in H$

$$\alpha_k^*(V) = \sum_{j=1}^{k}\rho_j\left\langle \frac{g^*-y_j}{\left\|g^*-y_j\right\|}, g^*-y_j \right\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\rho_j\left\langle \frac{g^*-y_j}{\left\|g^*-y_j\right\|}, g^*-g \right\rangle + \sum_{j=1}^{k}\rho_j\left\langle \frac{g^*-y_j}{\left\|g^*-y_j\right\|}, g-y_j \right\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \rho_j \left\langle \frac{g^* - y_j}{\left\| g^* - y_j \right\|}, g - y_j \right\rangle \le \max_{y \in K} \left\| g - y \right\|.$$

Тоді $\alpha_k^*(V) \le \inf_{g \in H} \max_{y \in K} \| g - y \| = \alpha_k^*$, що суперечить умові $\alpha_k^* < \alpha_k^*(V)$.

Одержана суперечність доводить, що $\sum_{j=1}^{k} \rho_j (g^* - y_j) \ne 0$.

Тоді $k = n+1$ та елементи φ_j, $j = \overline{1, n+1}$, утворюють лінійно незалежну систему, а числа ρ_j, $j = \overline{1, n+1}$, – додатні (див. твердження 1).

Для кожного $j = \overline{1, n+1}$ маємо

$$\left\langle \frac{g^* - y_j}{\left\| g^* - y_j \right\|}, g_1^* - y_j \right\rangle \le \alpha_k^*(V), \quad \left\langle \frac{g^* - y_j}{\left\| g^* - y_j \right\|}, g_2^* - y_j \right\rangle \le \alpha_k^*(V).$$

Оскільки для всіх $j = \overline{1, n+1}$ на підставі (6)

$$\frac{\left\langle \frac{g^* - y_j}{\left\| g^* - y_j \right\|}, g_1^* - y_j \right\rangle + \left\langle \frac{g^* - y_j}{\left\| g^* - y_j \right\|}, g_2^* - y_j \right\rangle}{2} =$$

$$= \left\langle \frac{g^* - y_j}{\left\| g^* - y_j \right\|}, \frac{g_1^* + g_2^*}{2} - y_j \right\rangle = \left\langle \frac{g^* - y_j}{\left\| g^* - y_j \right\|}, g^* - y_j \right\rangle = \alpha_k^*(V),$$

то

$$\left\langle \frac{g^* - y_j}{\left\| g^* - y_j \right\|}, g_1^* - y_j \right\rangle = \left\langle \frac{g^* - y_j}{\left\| g^* - y_j \right\|}, g_2^* - y_j \right\rangle = \alpha_k^*(V), \quad j = \overline{1, n+1}.$$

Тому для всіх $j = \overline{1, n+1}$ $\left\langle \frac{g^* - y_j}{\left\| g^* - y_j \right\|}, g_1^* - g_2^* \right\rangle = 0$,

$$\left\langle \varphi_j, g_1^* - g_2^* \right\rangle = 0, \tag{8}$$

де $\varphi_j = \frac{g^* - y_j}{\left\| g^* - y_j \right\|}$. Нехай $g_1^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^1 g_i$, $g_2^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 g_i$.

З (8) випливає, що для всіх $j = \overline{1, n}$ $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^1 - \alpha_i^2) \left\langle \varphi_j, g_i \right\rangle = 0$. Згідно з умовою (H): $\det\left[\left\langle \varphi_j, g_i \right\rangle \right] \ne 0$.

Звідси робимо висновок, що $\alpha_i^1 = \alpha_i^2$ для всіх $i = \overline{1, n}$. Тому $g_1^* = g_2^*$.

Єдиність екстремального елемента для чебишовського центра компакту K в підпросторі V в цьому випадку встановлено.

Справедливість зазначеного в теоремі критерію екстремального елемента для величини (1) випливає з наслідку 3 (див., [6, с.149]) та рівності $k = n+1$.

Теорему доведено.

Теорема 3. Нехай виконуються умови теореми 2. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існували такі $y_j \in K$, що

$$\left\langle \frac{g^* - y_j}{\left\| g^* - y_j \right\|}, g_1^* - y_j \right\rangle = \max_{y \in K} \left\| g^* - y \right\|, \ j = \overline{1, n+1}, \tag{9}$$

та мінори M_{1j}, $j = \overline{1, n+1}$, *детермінанта*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \left\langle g^* - y_1, g_1 \right\rangle & \dots & \left\langle g^* - y_{n+1}, g_1 \right\rangle \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \left\langle g^* - y_1, g_n \right\rangle & \dots & \left\langle g^* - y_{n+1}, g_n \right\rangle \end{vmatrix}$$

змінювали свої знаки: $\operatorname{sign} M_{1j+1} = -\operatorname{sign} M_{1j}$, $j = \overline{1, n}$.

Доведення. Необхідність. Нехай $g^* \in V$ є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1). Згідно з теоремою 2 існують елементи $y_j \in K$, $j = \overline{1, n+1}$, додатні числа ρ_j, $j = \overline{1, n+1}$, для яких мають місце співвідношення (3)-(5).

При доведенні теореми 2 встановлено, що елементи $g^* - y_j$, $j = \overline{1, n+1}$, утворюють лінійно незалежну систему.

Тому, згідно з умовою (H), 2-й, ..., n+1-й рядки детермінанта Δ є лінійно незалежними, а всі його мінори M_{1j}, $j = \overline{1, n+1}$, відмінні від нуля.

Легко переконатися, що $\Delta \neq 0$. Тоді система сумісна і має єдиний розв'язок.

З урахуванням (4) та того факту, що 2-й, ..., n+1-й рядки визначника Δ є лінійно незалежні, маємо, що

$$\sum_{j=1}^{n+1} \rho_j \left\langle g^* - y_j, g_i \right\rangle = 0, \ j = \overline{1, n}. \tag{10}$$

Нехай $\Delta > 0$. З рівностей (5), (10) на основі формул Крамера робимо висновок, що для $j = \overline{1, n}$ $\rho_j = \frac{(-1)^{1+j} M_{1j}}{\Delta}$, $\rho_{j+1} = \frac{(-1)^{1+j+1} M_{1j+1}}{\Delta}$. Оскільки $\rho_j > 0$, $j = \overline{1, n+1}$, і за припущенням $\Delta > 0$, то $(-1)^{1+j} M_{1j} > 0$ та $(-1)^j M_{1j+1} > 0$.

Тому при $M_{1j} > 0$ матимемо, що $(-1)^{1+j} > 0$, а тоді $(-1)^j < 0$. Зрозуміло, що в цьому випадку $M_{1j+1} < 0$. Якщо ж $M_{1j} < 0$, то $(-1)^{1+j} < 0$, а $(-1)^j > 0$. Тому $M_{1j+1} > 0$.

Аналогічно розглядається випадок, коли $\Delta < 0$.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для елемента $g^* \in V$ існують такі $y_j \in K$, $j = \overline{1, n+1}$, що мають місце рівність (9) та мінори M_{1j}, $j = \overline{1, n+1}$, які відмінні від нуля і змінюють свої знаки: $\operatorname{sign} M_{1j} = -\operatorname{sign} M_{1j+1}$, $j = \overline{1, n}$.

Доведемо, що g^* є екстремальним елементом для величини (1).

Якщо $M_{11} > 0$, то $\Delta > 0$, бо $\rho_j > 0$, $\rho_j = \frac{(-1)^{1+j} M_{1j}}{\Delta}$ на основі формул Крамера. В даному випадку $\rho_1 = \frac{(-1)^{1+1} M_{11}}{\Delta}$, $M_{11} > 0$, $\rho_j > 0$, тому й $\Delta > 0$. Аналогічно, якщо $M_{11} < 0$, то $\Delta < 0$.

Тому система рівнянь (5), (10) має єдиний розв'язок, для якого $\rho_j > 0$, $j = \overline{1, n+1}$.

З (5), (9), (10) на основі теореми 2 робимо висновок, що g^* є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1) (чебишовським центром компакту K в підпросторі V).

Теорему доведено.

Таким чином, уточнено критерій екстремального елемента величини (1) (отриманий для випадку довільного скінченновимірного підпростору [6]) для випадку, коли у задачі відшукання величини (1) V є чебишовським підпростором; доведено теорему про єдиність екстремального елемента у розглядуваному випадку; узагальнено на випадок задачі відшукання величини (1) поняття чебишовського альтернансу. Отримані результати можуть бути використані для дослідження і розв'язування задач апроксимації та оптимізації.

Список використаних джерел

1. Белобров П. К. Об одной задаче чебышевского приближения // Изв. высш. учебн. заведений. Математика. – 1967. – № 2. – С. 3 – 8.
2. Гаркави А. Л. О чебышевском центре множества в нормированном пространстве // Исслед. по соврем. пробл. конструктивн. теории функций. – М.: Физматгиз, 1961. – С. 328 – 331.
3. Гаркави А. Л. Об условном чебышевском центре компактного множества непрерывных функций // Математические заметки. – 1973. – 14, № 4.– С. 469 – 478.
4. Pevae L. Chebyshev centres in normed spaces // Publications de L'Institut Mathematique. – 1989. – Tome 45 (59). – P. 109 – 112.
5. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
6. Криворучко Н. І. Найкраща апроксимація скінченновимірною опуклою множиною гільбертового простору // Актуальні проблеми комп'ютерних технологій. Збірник наукових праць за матеріалами другої всеукраїнської науково-технічної конференції «Актуальні проблеми комп'ютерних технологій 2008». – Хмельницький: ХНУ, 2008. – Т. 1. – С. 145 – 150.